$$\boxed{n = 10^k \cdot a_k + 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0 = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}}$$

Ushtrimi nr. 1

Vërtetoni se nr. natyror plotëpjesetohet me 3 atëherë dhe vetëm atëherë kur shuma e shifrave të tij, plotëpjesetohet me 3

Vërtetim

Le të kemi $n \in \mathbb{N}$.

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} = 10^k \cdot a_k + 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0$$

$$= (10^k - 1) a_k + (10^{k-1} - 1) a_{k-1} + \dots + (10-1) a_1 + (a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k)$$

$$= 9 \cdot \underbrace{(\underbrace{11\dots1}_{k} \cdot a_k + \dots + 1 \cdot a_1)}_{= l \in \mathbb{N}} + S = 9 \cdot l + S$$

Pra: $\boxed{n = 9 \cdot l + S}$

($\Rightarrow$) $n \vdots 3 \Leftrightarrow n = 3p,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow 3p = 9l + S \Rightarrow S = 3(p - 3l) \vdots 3$

($\Leftarrow$) $S \vdots 3 \Leftrightarrow S = 3q,\ q \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 9l + 3q = 3(3l + q) \vdots 3$

Ushtrimi nr. 2

Vërtetoni se nr. natyror plotëpjesetohet me 9 atëherë dhe vetëm atëherë kur shuma e shifrave të tij plotëpjesetohet me 9

Nga ushtrimi më lart kemi: $n = 9 \cdot l + S$

($\Rightarrow$) $n \vdots 9 \Leftrightarrow n = 9p,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow 9p = 9l + S \Leftrightarrow S = 9(p - l) \vdots 9$

($\Leftarrow$) $S \vdots 9 \Leftrightarrow S = 9q,\ q \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 9 \cdot l + 9 \cdot q = 9(l + q) \vdots 9$

Ushtrimi nr. 3

Të gjendet nr. treshifror $\overline{abc}$ mqs nr. katërshifror $\overline{abc1}$ është tre herë më i madh se nr. katërshifror $\overline{2abc}$

Zgjidhja

Nga kushtet marrim:

$$\overline{abc1} = 3 \cdot \overline{2abc} \Leftrightarrow \underbrace{\overline{abc}}_{x} \cdot 10 + 1 = 3 \cdot (2000 + \underbrace{\overline{abc}}_{x}) \Leftrightarrow$$

$$10x + 1 = 3 \cdot (2000 + x) \Leftrightarrow 10x + 1 = 6000 + 3x \Leftrightarrow 7x = 5999 \Leftrightarrow$$

$\boxed{x = 857}$ Pra $\overline{abc} = 857$

$$\overline{abc1} = 8571 = 3 \cdot 2857 = 3 \cdot \overline{2abc}$$

4. Të gjendet shifra e panjohur e numrit $512x$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 6.

Zgjidhje:

Duhet të gjejmë shifrën x ashtu që numri $512x$ te plotpjestohet me numrin 2 dhe me numrin 3. Që të plotpjestohet një numër me numrin 2 duhet dhe mjafton që shifra e fundit e tij të jetë çift. Pra $x \in \{0,2,4,6,8\}$. Që të plotpjestohet një numër me numrin 3 duhet dhe mjafton që shuma e shifrave të tij të plotpjestohet me 3. Pra $5+1+2+x=8+x \mid 3$. Nga këtu kemi $x \in \{1,4,7\}$. Përfundimisht $x \in \{0,2,4,6,8\} \cap \{1,4,7\} = \{4\}$. Pra $x=4$ dhe numri është 5124.

5. Të gjenden shifrat e panjohura të numrit $1y2x6$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 12.

Zgjidhje:

Një numër natyror plotpjestohet me 12, atëherë dhe vetëm atëherë kur ai plotpjestohet me 3 dhe me 4. Që të plotpjestohet numri $1y2x6$ me numrin 4, duhet dhe mjafton që numri që formohet nga dy shifrat e fundit të plotpjestohet me 4. Pra numri $x6 \mid 4$ dhe kjo implikon $x \in \{1,3,5,7,9\}$. Që të plotpjestohet numri $1y2x6$ me numrin 3, duhet dhe mjafton që $1+y+2+x+6=9+x+y \mid 3$. Tani marrim rastet:

- $x=1 \Longrightarrow 10+y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{2,5,8\}$. Numrat janë: 12216, 15216 dhe 18216.
- $x=3 \Longrightarrow 12+y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{0,3,6,9\}$. Numrat janë: 10236, 13236, 16236 dhe 19236.
- $x=5 \Longrightarrow 14+y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{1,4,7\}$. Numrat janë: 11256, 14256 dhe 17256.
- $x=7 \Longrightarrow 16+y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{2,5,8\}$. Numrat janë: 12276, 15276 dhe 18276.
- $x=9 \Longrightarrow 18+y \mid 3 \Longrightarrow y \in \{0,3,6,9\}$. Numrat janë: 10296, 13296, 16296 dhe 19296.

6. Të gjenden shifrat e panjohura të numrit $20y31x$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 45.

Zgjidhje:

Një numër natyror plotpjestohet me 45, atëherë dhe vetëm atëherë kur ai plotpjestohet me 5 dhe me 9. Që të plotpjestohet numri $20y31x$ me numrin 5, duhet dhe mjafton që shifra e fundit e numrit $20y31x$ të jetë 0 ose 5. Që të plotpjestohet një numër me numrin 9 duhet dhe mjafton që shuma e shifrave të tij të plotpjestohet me 9. Pra $2+0+y+3+1+x=6+x+y \mid 9$. Tani shqyrtojme dy rastet:

- $x=0 \Longrightarrow 6+y \mid 9 \Longrightarrow y \in \{3\}$. Numri është: 203310.
- $x=5 \Longrightarrow 11+y \mid 9 \Longrightarrow y \in \{7\}$. Numri është: 207315.

7. Të gjenden shifrat e panjohura të numrit $1ab02xy$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 225.

Zgjidhje:

Një numër natyror plotpjestohet me 225, atëherë dhe vetëm atëherë kur ai plotpjestohet me 25 dhe me 9 meqënëse 225=25·9. Që të plotpjestohet një numër me numrin 25 duhet dhe mjafton që numri që formohet nga dy sifrat e fundit të tij të jetë 00,25,50 ose 75.
Pra $1ab02xy \mid 25 \Leftrightarrow x=0, y=0\ ;\ x=2, y=5\ ;\ x=5, y=0\ ;\ x=7, y=5$. Shqyrtojmë rastet:

- $x=0, y=0 \Longrightarrow 1ab0200 \mid 9 \Leftrightarrow a+b+3 \mid 9 \Leftrightarrow a+b \in \{6,15\}$. Duke shqyrtuar të gjitha situatat e mundshme fitojmë numrat: $1060200, 1150200, 1240200, 1330200, 1420200, 1510200, 1600200$ dhe $1690200, 1780200, 1870200, 1960200$.

- $x = 2, y = 5 \Longrightarrow 1ab0225 \mid 9 \Leftrightarrow a + b + 10 \mid 9 \Leftrightarrow a + b \in \{8,17\}$. Duke shqyrtuar të gjitha situatat e mundshme fitojmë numrat: $1080225, 1170225, 1260225, 1350225, 1440225, 1530225, 1620225, 1710225,$ 1800225 dhe $1890225, 1980225$.
- $x = 5, y = 0 \Longrightarrow 1ab0250 \mid 9 \Leftrightarrow a + b + 8 \mid 9 \Leftrightarrow a + b \in \{1,10\}$. Duke shqyrtuar të gjitha situatat e mundshme fitojmë numrat: $1010250, 1100250$ dhe $1190250, 1280250, 1370250, 1460250, 1550250, 1640250, 1730250, 1820250, 1910250$.
- $x = 7, y = 5 \Longrightarrow 1ab0275 \mid 9 \Leftrightarrow a + b + 15 \mid 9 \Leftrightarrow a + b \in \{3,12\}$. Duke shqyrtuar të gjitha situatat e mundshme fitojmë numrat: $1030275, 1120275, 1210275, 1300275$ dhe $1390275, 1480275, 1570275, 1660275, 1750275, 1840275, 1930275$.

8. Të gjenden shifrat e panjohura të numrit $34x5y$, ashtu që ky numër të plotpjestohet me 36.

Zgjidhje:

$34x5y \mid 36$ dhe $36 = 4 \cdot 9$ atëherë mjafton të jetë $34x5y \mid 4$ dhe $34x5y \mid 9$. Nga plotpjestueshmeria me 4 kemi $5y \mid 4$. Kjo edhe mjafton. Pra $y \in \{2,6\}$. Nga plotpjestueshmeria me 9 kemi $3 + 4 + 5 + x + y = 12 + x + y \mid 9$. Kjo edhe mjafton. Për $y = 2$ kemi $14 + x \mid 9$ nga ku fitojmë numrin 34452 dhe për $y = 6$ kemi $18 + x \mid 9$ nga ku fitojmë numrat 34056 dhe 34956.

9. Shqyrtoni plotpjestueshmërinë e numrit $25 \cdot 10^{25} + 24 \cdot 10^{112} + 17$ me numrat 3, 6 dhe 9.

Zgjidhje:

Numri $a = 25 \cdot 10^{25} + 24 \cdot 10^{112} + 17 = 2400 \ldots 02500 \ldots 017$ është numër tek dhe e ka shumën e shifrave $2 + 4 + 2 + 5 + 1 + 7 = 21$. Numri a është tek prandaj nuk plotpjestohet me 6. Meqënëse $21 \mid 3$ atëherë numri $a \mid 3$. Meqënëse $21 \nmid 9$ atëherë numri $a \nmid 9$.

10. A plotpjestohen numrat:

    a) $2 \cdot 10^n + 1$, ku $n \in \mathbb{N}$.
    b) $5 \cdot 10^{100} + 6 \cdot 10^{15} + 5 \cdot 10^4 + 2$

    me numrat 3, 6 dhe 9?

Zgjidhje:

Për pikën a) kemi $2 \cdot 10^n + 1 = 20 \ldots 01$ pra është numër tek dhe shumën e shifrave e ka të barabartë me 3. Kështu plotpjestohet me 3, nuk plotpjestohet me 6 dhe nuk plotpjestohet me 9.
Për pikën b) kemi numrin $a = 5 \cdot 10^{100} + 6 \cdot 10^{15} + 5 \cdot 10^4 + 2 = 50 \ldots 060 \ldots 050002$ i cili është çift dhe e ka e ka shumën e shifrave të barabartë me 18. Nga këtu kemi që ky numër plotpjestohet me 3, me 6 dhe me 9.

11. Vërtetoni që numri natyror n plotpjestohet me numrin 7, atëherë dhe vetëm atëherë kur diferenca e numrit që përftohet nga numri n duke i hequr shifrën e fundit dhe e numrit I cili është i barabartë me dyfishin e shifrës së fundit të numrit n, plotpjestohet me numrin 7.

Zgjidhje:

Le të jetë $n = a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ i paraqitur përmes shifrave. Shënojmë $m = a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1$ dhe $s = 2a_0$. Duhet të vërtetojmë që $n \mid 7$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $m - s \mid 7$. Kemi barazimin: $m - s =$

$a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 - 2a_0 = \frac{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 0 - 20a_0}{10} = \frac{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0 - 21a_0}{10} = \frac{n - 21a_0}{10}$. Nga këtu rrjedh barazimi $10(m - s) = n - 21a_0$ ose $n = 10(m - s) + 21a_0$.

Tani n.q.s. $m - s \mid 7$ atëherë $m - s = 7u \Longrightarrow n = 70u + 21a_0 = 7(10u + 3a_0) \mid 7$.

N.q. s $n \mid 7$ atëherë $n = 7u \Longrightarrow 10(m - s) = 7u - 21a_0 = 7(u - 3a_0) \Longrightarrow 10(m - s) \mid 7 \Longrightarrow m - s \mid 7$.